

## NOTAS

---

### Medida objetiva de la riqueza en Europa<sup>1</sup>

Eugenio M. Fedriani Martel y Ana María Sánchez Sánchez<sup>2</sup>

**Resumen:** La medición de la riqueza de una nación en un período de tiempo es un problema difícil de resolver desde el punto de vista estadístico, tanto por la habitual irregularidad de los datos disponibles como por la propia subjetividad del concepto de riqueza en sentido amplio. En este artículo se propone una técnica matemática basada en un par de conceptos sencillos y que permite resolver parcialmente el problema planteado. Pese a su simplicidad, el método es bastante visual, suficientemente preciso y extraordinariamente versátil. En concreto, se puede utilizar con series de datos irregularmente espaciadas en el tiempo y hasta permite comparar unidades de análisis en los que se cuenta con datos no simultáneos. Se aplica al análisis de la riqueza en los países de Europa, con especial atención al período 1998–2009, y se comprueba que los resultados son razonablemente precisos, teniendo en cuenta los datos de los que se partía.

**Palabras clave:** *Riqueza, Europa, Estadística, Matemáticas, interpolación, diagramas de Voronoi.*

**Fecha de recepción:** 8 de agosto de 2011

**Fecha de admisión definitiva:** 20 de octubre de 2011

---

<sup>1</sup> Los autores agradecen a los evaluadores anónimos y a los miembros del Consejo de Redacción las valiosas sugerencias aportadas durante la preparación del artículo.

<sup>2</sup> Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica, Universidad Pablo de Olavide.

### **Objectively calculating wealth in Europe**

**Abstract:** Measuring the wealth of a nation over a period of time is a difficult problem from a statistical point of view, both because of the general irregularity of available data as well as because of the relatively subjective nature of the concept of wealth in a general sense. This article proposes a mathematical technique based on some simple concepts that affords a partial solution to the problem at hand. Despite its simplicity, the method is quite visual, sufficiently precise and extraordinarily versatile.

**Keywords:** *Wealth, Europe, Statistics, Mathematics, interpolation, Voronoi diagrams.*

### **Mesure objective de la richesse en Europe**

**Résumé:** La mesure de la richesse d'un pays en une période de temps est un problème difficile à résoudre du point de vue statistique, tant à cause de l'irrégularité des données disponibles que de la propre subjectivité du concept de richesse dans son sens le plus large. Dans cet article nous proposons une technique mathématique basée sur quelques concepts très simples et qui permettent de résoudre partiellement le problème posé. Malgré sa simplicité, cette méthode est assez visuelle, suffisamment précise et extraordinairement versatile. Concrètement, elle peut être utilisée avec des séries de données espacées irrégulièrement dans le temps et même pour comparer des unités d'analyse avec des données non simultanées. Cette technique s'applique à l'analyse de la richesse des pays Européens, en particulier pendant la période 1998–2009, en obtenant des résultats raisonnablement précis à partir des données disponibles.

**Mots clé:** *Richesse, Europe, Statistique, interpolation, diagrammes de Voronoi.*

## **I. Introducción**

Todos somos conscientes de la necesidad de buscar una mayor justicia en el reparto de la riqueza, en sus diferentes aspectos. En situaciones de desigualdad, este propósito encuentra su apoyo en la solidaridad y la fraternidad. Sin embargo, para procurar estos objetivos sociales, a menudo hacen falta herramientas cuantitativas que permitan un mejor diagnóstico de la situación y una previsión, aunque sea parcial, de los efectos de las posibles actuaciones políticas distributivas. No tenemos que mirar muy lejos para comprobar que la riqueza es algo relativo y que rara vez permite comparaciones en contextos distintos. Europa, por

ejemplo, es una región rica, sobre todo si la miramos desde la vecina África. Por supuesto, no es que no haya pobres en Europa, algo que se puede comprobar fácilmente en estudios como el de Van Praag *et al.* (1982). De hecho, las evidencias históricas de la lucha contra la pobreza en Europa son muy claras, incluso en tiempos recientes. Se han realizado actuaciones tanto dentro de cada país como de los países más ricos hacia los que lo son menos. Así, la creación del Fondo de Cohesión pretendía principalmente facilitar el ingreso en la unión monetaria por parte de los países menos desarrollados (Consejo de Redacción RFS, 2010) y la política monetaria europea en su conjunto está orientada hacia la estabilidad global, a pesar de que los ajustes entre unos y otros, ricos y pobres, han sido, son y seguirán siendo tremendamente complejos.

Recientemente se ha hablado mucho sobre la gran diversidad económica de la Unión Europea. En un reflejo de esta preocupación, el Consejo de Redacción RFS (2010) incide especialmente en las diferencias en los sectores de producción; otros autores se fijan más en diferentes indicadores. Todos tienen motivos para dibujar un continente heterogéneo. Para Moyano (2010), la Unión Europea, en la que se concreta política e institucionalmente Europa, tiene como una de sus tres corrientes ideológicas fundacionales el liberalismo; entendido en su versión económica, esto justificaría por sí solo unas notables diferencias de riqueza entre las naciones constituyentes. Pero, al mismo tiempo, el autor reconoce la influencia crucial del catolicismo social, que le imprimió a la región un carácter singular y único, y gracias al cual surge la enérgica voluntad internacional de cooperación, a pesar de las diferencias culturales e ideológicas de los países que la componen.

Abandonando de momento la cuestión socio-política europea, cabe plantear otra pregunta clave, complementaria de la anterior, aunque de índole bastante más técnica: ¿realmente es posible encontrar una medida objetiva de la riqueza en una región? No nos referimos específicamente al concepto en estricto sentido macroeconómico, sino más bien a la riqueza como sinónimo de bienestar o desarrollo social. Una respuesta afirmativa a este anhelo proporcionaría la posibilidad de obtener un valiosísimo instrumento en la lucha contra las desigualdades. Lo que no está tan claro es cuál debe ser la naturaleza del esquema que permita tal avance. La búsqueda de una estrategia de cuantificación y el requisito simultáneo de la objetividad pueden hacernos mirar hacia las Ciencias Exactas, que sin duda nos proporcionarían un respaldo serio y riguroso; pero las dificultades de la tarea también surgen de manera casi inmediata. Por una parte, a nadie escapa que la riqueza es un concepto con un fuerte componente subjetivo; por otro lado, parece ingenuo suponer conocida toda la información necesaria para evaluar el bienestar ni siquiera en un grupo reducido de personas; ¿cómo afrontar entonces

la consideración de millones de individuos pertenecientes a sociedades distintas? Las dos limitaciones comentadas antes, contra las que han luchado con fortuna dispar los estadísticos durante muchísimo tiempo, parecen asequibles desde el punto de vista del matemático puro, para el que las teorías siempre se apoyan en la verdad científica y sus aplicaciones resisten fácilmente los envites de la duda razonable. Sin embargo, la Matemática puede desarrollarse y permanecer aislada del mundo real, lo que en ocasiones dificulta o, incluso, imposibilita su aplicación práctica.

Además, se ha hablado de limitaciones de información y de opinión. ¿Será posible obtener unos datos de calidad suficiente como para extraer conclusiones rigurosas? ¿Y será realista tratar de definir el concepto de riqueza de un modo universalmente aceptado? La intuición y la experiencia nos pueden inducir a pensar que no, con lo que es razonable admitir el valor que puedan proporcionar las aproximaciones a la solución del problema, provengan de la Estadística o, en general, de la Matemática. En concreto, de las técnicas estadísticas posibles para afrontar esta cuestión, hemos elegido la más sencilla (y que prácticamente no se usa con este fin) y la hemos enriquecido con consideraciones sobre un par de conceptos matemáticos. Gracias a esto, surge un procedimiento de manera natural y del que pueden conseguirse resultados similares a los que se obtienen con técnicas mucho más complejas, pese a que lo esperable sería obtener unos resultados mucho menos precisos.

Tras esta breve introducción, el artículo consta de otras cuatro secciones. En la siguiente se presentará el planteamiento matemático del problema y se comentarán de forma sencilla las herramientas básicas utilizadas. Posteriormente, se aprovecharán dichas herramientas en un modo distinto al habitual y se describirá una técnica original para el análisis de datos irregulares que varían con el tiempo: primero se presentará para una sola variable y luego para varias. La penúltima sección se dedicará a la aplicación de la técnica a la Europa de entre 1998 y 2009 (aunque se utilizan todos los datos públicos disponibles, desde 1995 hasta 2010). Finalmente, se resumirán algunas de las conclusiones más destacadas de lo expuesto.

## 2. Descripción del problema

En esta sección nos referimos al problema cuantitativo, no tanto al social. Se trata de la dificultad de medir un fenómeno multidimensional, subjetivo y que, además, varía con el tiempo. La dudosa representatividad de la información utilizada, con

respecto al hecho en sí, la obviaremos en un primer momento, suponiendo que la variable (o las variables) que se considere es fiel reflejo de lo que se quiere analizar. Más adelante, cuando apliquemos la técnica a un caso concreto, veremos cómo la elección de las variables más adecuadas también es crucial para el resultado final de la investigación.

Es muy habitual decidir qué variable es la que mejor refleja lo que se quiere medir y, posteriormente, aplicarle técnicas estadísticas adecuadas para obtener información; no obstante, dichas técnicas requieren frecuentemente una regularidad en los datos que no siempre se da. Por otro lado, existen técnicas estadísticas multivariantes que permiten la selección de varias variables y la consideración de todas ellas al mismo tiempo, pero dichas técnicas son por lo general aún más complejas y exigentes que las univariantes.

En la situación anterior, como se ha dicho, nos planteamos la medición simultánea de varias características de un mismo fenómeno. El que la realidad se pueda representar cuantitativamente ya es algo discutible para algunos científicos, pues siempre pueden existir factores cualitativos que no encajen correctamente en los esquemas previstos en el diseño del experimento. No obstante, la Estadística (y, en parte, también la Matemática, de la que la Estadística puede considerarse una rama) se ha desarrollado sobre la hipótesis clásica de que los números sirven para representar eficientemente el mundo que nos rodea. Una vez aceptada esta posibilidad de cuantificar la realidad, nos enfrentamos con la dificultad de que ningún análisis está completo si no se contemplan diferentes aspectos o facetas, cuya interrelación varía de una situación a otra. Es decir, es posible que el estudio de las variables de forma independiente nos haga perder información relevante que permanece oculta en las relaciones presentes entre dichas variables.

A lo largo de la historia han surgido numerosos intentos de considerar científicamente la multidimensionalidad. La más estrechamente relacionada con nuestra investigación es la que se refiere a la teoría de indicadores. En ocasiones se utilizan indicadores unidimensionales para aproximar la representación de un fenómeno, y es posible obtener resultados de interés, pero cada vez tienen más relevancia los multidimensionales. En estos últimos, lo más habitual es asignar un peso a cada una de las variables consideradas, de modo que la suma ponderada de todas las variables nos facilita la medida deseada; a veces, sin embargo, se prefiere mantener separadas las componentes (o variables), con lo que se preserva la información relativa a cada variable a costa de dificultarse la interpretación de los valores obtenidos en los casos de estudio. Luego veremos cómo trabajar con una sola variable y cómo, posteriormente, procederemos teniendo en cuenta varias de forma simultánea.

Pensemos otra vez en el caso multivariante y en cómo asignar un peso a cada variable. Aunque esto se puede realizar de múltiples formas distintas, unas más sofisticadas que otras (en Domínguez *et al.* (2011) hay más detalles al respecto), la determinación de los pesos es equivalente a una definición cuantitativa del fenómeno a analizar. Esto implica que se es capaz de acabar con su subjetividad de la definición del concepto que se estudia, algo que no siempre es tan fácil. En concreto, en el caso de la riqueza es utópico llegar a un acuerdo universal sobre qué importancia relativa tiene cada característica en el global del término que se estudia, pero ha habido serios intentos como, por ejemplo, los que se exponen en PNUD (2010). En resumen, cualquier sistema de pesos que se establezca será discutible (y discutido), porque no se pueden encontrar motivos contundentes para elegir exactamente una de entre las infinitas posibilidades existentes.

Revisando las dificultades del problema, finalmente, debemos ocuparnos de un último aspecto trascendental, tanto en el caso univariante como en el multivariante: cómo analizar un fenómeno que varía con el tiempo. Obviamente, se necesita estudiar las variaciones experimentadas por las variables que se utilicen para estudiarlo. En el fondo, eso es lo que se hace cuando se recurre al Análisis de Series Temporales: considerar que las variables son funciones dependientes del tiempo (el tiempo sería en dichos casos la variable independiente). Las bases de este tipo de análisis (tanto en el llamado dominio del tiempo como en el de la frecuencia) pueden consultarse en el texto clásico de Box y Jenkins (1976), aunque aquí no vamos a necesitarlas. Baste recordar este punto cuando discutamos el concepto de interpolación (un poco más adelante, en esta misma sección) y comentar que la aplicación de las técnicas habituales en el Análisis de Series Temporales se complican sobremedida en presencia de datos perdidos (Daveym y Savla, 2010) o cuando los intervalos temporales tienen distintas amplitudes. En efecto, comenzaremos la Sección 3 por esta cuestión: estudiaremos una serie temporal y desigualmente espaciada, proponiendo un primer indicador, útil para comparar series temporales univariantes. Luego le incorporaremos la componente multidimensional, procurando no dificultar la modelización, y definiremos otro indicador diseñado para comparar series temporales multivariantes.

Nuestras definiciones serán propuestas teóricas que después llevaremos a la práctica en un ejemplo concreto, pero eso no garantiza que sean las mejores soluciones para cualquier problema parecido, ni siquiera da pie a que sean buenas soluciones en esas circunstancias. Y es que en Matemáticas los modelos son perfectos a pesar de que la realidad no lo es; aunque sí es, por lo general, muy compleja. Por eso, hay que encontrar un balance entre la dificultad del modelo y la validez de la aproximación que proporciona: un modelo muy completo, por

lo general, será intratable desde el punto de vista matemático (o presentará unos requisitos tan exigentes que no será útil); sin embargo, un modelo muy sencillo difícilmente aproximará correctamente la realidad que se está analizando. Este es el motivo de que las técnicas matemáticas exactas no siempre sean la mejor herramienta para modelizar. Frecuentemente es más válida una aproximación estadística en la que se puedan obtener resultados con un menor coste (computacional o de tiempo o de información necesaria, por poner tres ejemplos típicos) y que ajusten lo que se quiera al nivel de precisión que se desee. Ambos tipos de herramientas cuantitativas (las exactas y las aproximadas) pueden encontrar su acomodo en cualquier problema relacionado con la Economía o la Sociología. En nuestro caso, a pesar de que los datos no son completamente fiables, vamos a utilizar herramientas matemáticas exactas básicas y nos contentaremos al comprobar que los resultados producidos son razonablemente eficaces; en otras ocasiones, como es lógico, son más eficientes otras técnicas algo más complejas y desarrolladas.

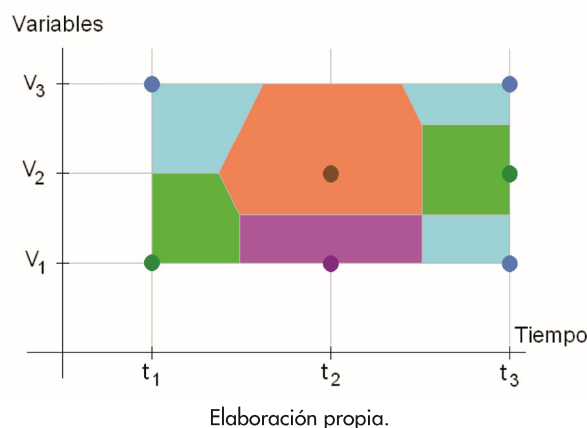
De los conceptos matemáticos necesarios y útiles para nuestros propósitos, proponemos fijar la atención del lector en los siguientes: interpolación (con el caso particular de los diagramas de Voronoi), áreas y volúmenes.

La interpolación, en el primer ámbito que nos ocupa (una sola variable independiente) y en la notación estándar, consiste en conseguir una función que pase por todos los datos; es decir, dados unos puntos con coordenadas bidimensionales  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , de modo que los  $y_i$  representan los valores de la variable dependiente (o variable a estudiar) y los  $x_i$  significan los valores de la variable independiente (que en las series temporales es la variable tiempo), un modelo matemático continuo supondrá que se puede conseguir una función real  $f$  de modo que  $f(x_i) = y_i$  para todos los  $i$  entre 1 y  $n$ . El problema es que siempre hay infinitas funciones  $f$  que cumplen lo anterior, incluso si se les exigen ciertas condiciones de regularidad, como que la función sea continua o diferenciable. La complejidad de la función la podemos valorar por su orden: a mayor orden, mayor complejidad. Una interpolación de orden 0 implica que la función  $f$  está formada por segmentos horizontales; una interpolación de orden 1 son segmentos de cualquier tipo; una interpolación de orden 2 está compuesta por arcos de parábola; y así sucesivamente. Si todos los  $x_i$  son distintos, con las interpolaciones de orden 1 ya es posible garantizar la consecución de una función  $f$  continua y que pase por todos los puntos originales. Sin embargo, nosotros utilizaremos posteriormente una interpolación de orden 0, que veremos que es muy sencilla y que es suficiente para comparar series temporales con una precisión razonable, a pesar de no ser continua en general. Obviamente, el error cometido con respecto a la función

que subyace realmente en el fenómeno, dependerá tanto de la amplitud de los intervalos temporales como de las diferencias de los valores de la variable dependiente entre intervalos consecutivos, pero en las series que nos ocupan no hemos detectado que el error sea excesivo porque las oscilaciones de las variables resultan bastante controladas. De hecho, considerar interpolaciones de orden mayor suele provocar que el resultado, más regular desde el punto de vista matemático, se aleja excesivamente de lo deseado al modelizar.

Cuando se considera más de una variable independiente, la obtención de funciones que pasen por unos puntos del espacio multidimensional es bastante más compleja que en el caso anterior. Los diagramas de Voronoi podrían considerarse una forma básica de resolver esa complicación y nosotros la utilizaremos a modo de interpolación de orden 0. Imaginemos un conjunto de puntos en el plano; estos puntos son nuestros datos iniciales y vamos a llamarlos nodos. El diagrama de Voronoi en el plano consiste en dividirlo en regiones que están cerca de cada uno de los nodos; es decir, cada punto del plano se asocia a la región en la que está el nodo del que queda más cerca (de entre todos los nodos del conjunto de datos). Puede verse un ejemplo de esto en la Figura 1. La interpolación aquí consistiría en dar a la función (real y con dos variables reales) el mismo valor en todos los puntos de cada región: el valor del nodo que pertenece a dicha región. El diagrama de Voronoi (también llamado teselación de Dirichlet o polígonos de Thiessen y cuyas referencias base son Dirichlet (1850) y Voronoi (1908)) es una herramienta relativamente usada en Matemática Discreta, aunque no demasiado

**FIGURA 1. Diagrama de Voronoi generado por 7 nodos provenientes de 3 series temporales irregularmente espaciadas**



en interpolación funcional, como puede comprobarse en Aurenhammer (1991), por ejemplo.

Los últimos conceptos preliminares que tenemos que recordar son los del cálculo de áreas y volúmenes. Por una parte, cuando queramos calcular el área por debajo de una función real de una sola variable real, podríamos confiar en las fórmulas geométricas más básicas o recurrir a las integrales definidas (lo que nos haría más flexibles). En el método más simple, si la función está formada por una sucesión de segmentos horizontales, el área resultará ser la suma de rectángulos cuyas áreas podremos calcular fácilmente. Por otro lado, cuando queramos calcular el volumen por debajo de una función real de dos variables reales, dicho volumen coincidirá con una integral doble; en el caso en que la función esté compuesta exclusivamente por trozos de planos horizontales (como será el caso en nuestra aplicación), dicho cálculo integral se puede evitar mediante el uso de las fórmulas clásicas para el cálculo del volumen de prismas rectos.

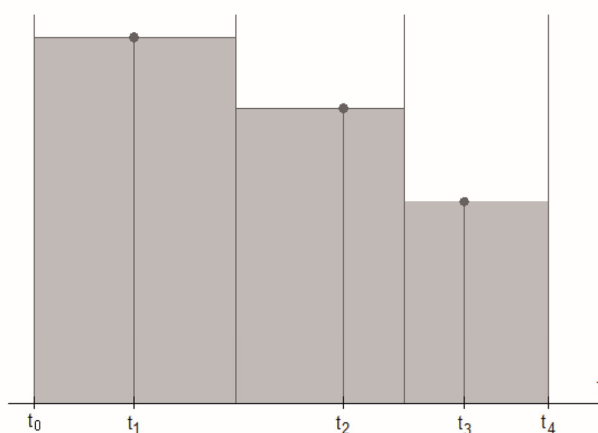
### 3. Metodología

#### 3.1. Caso de una serie temporal unidimensional e irregular

Partimos de varias series temporales que queremos comparar. A efectos de presentar la teoría, denotaremos la variable independiente (temporal) por  $t$ , de modo que el análisis comenzará en el instante  $t_0$  y se tendrán datos en  $t_1, t_2, \dots$  etc. Para interpolar los puntos del plano, primero dividiremos por la mitad la distancia entre cada par de instantes temporales consecutivos; es decir, subdividimos el intervalo de estudio eligiendo los puntos que están más cerca de un nodo que de los demás. Finalmente, realizamos una interpolación de orden 0 de modo que los puntos próximos a un nodo toman su mismo valor  $y$ , para terminar, calculamos el área que queda por debajo de dicha función. Esta construcción, que ilustramos en la Figura 2, nos proporciona una medida de la serie temporal que es comparable con la correspondiente a otras unidades de análisis.

Aunque la anterior pueda parecer una aproximación un tanto tosca, tiene varias ventajas sobre otras aproximaciones. Una de ellas es que no tiene apenas requisitos de aplicación y otra que, a pesar de ser una técnica tan simple, los resultados son razonablemente similares a los que se obtienen al realizar interpolaciones más complejas y comparar posteriormente los resultados, cuando la distancia entre los

**FIGURA 2. Construcción del indicador para una serie temporal unidimensional irregular**



Elaboración propia.

nodos no es excesiva. Téngase en cuenta que el área tras realizar la interpolación sugerida es semejante a la que resulta si se hubiera elegido la interpolación de orden 1, por poner un ejemplo que se puede comprobar visualmente, incluso en la Figura 2 (uniendo con una línea quebrada los datos de los que se parte y comparando el área resultante con la calculada antes). Es más, si poseemos datos en el instante inicial y en el final, es fácil demostrar geoméricamente que las áreas obtenidas con las interpolaciones de orden 1 y 2 coinciden exactamente.

### 3.2. Caso de una serie temporal multidimensional e irregular

En este segundo caso, que es en cierto modo una generalización del anterior, suponemos que contamos con varias series temporales de una misma unidad de análisis; cada una correspondería a una característica distinta de fenómeno que se quiere analizar. Vamos a denotar por  $v_i$  a las variables y por  $t_i$  a los instantes temporales de los que se cuenta con datos, con lo que los nodos serán de la forma  $(t_i, v_i)$ . Tras elegir la región del plano en la que se quiere realizar el estudio (que vendrá dada por el intervalo temporal total y por las variables consideradas), el siguiente paso será calcular el diagrama de Voronoi asociado a los nodos, como se hizo en la Figura 1. Finalmente, por cada subregión, o cada nodo correspondiente  $(t_i, v_i)$ , construiremos un prisma que tenga a dicho polígono por base y cuya

altura sea el valor de la variable  $v_i$  en el instante  $t_i$ . La suma de los volúmenes de todos los prismas definidos nos proporciona un indicador global del efecto de todas las variables sobre la unidad de análisis y en el período considerado. Dicho indicador podrá ser inmediatamente comparado en unas y otras unidades de análisis.

A fin de presentar las características más reseñables de esta propuesta de indicador, hay que tener en cuenta la escala en la que se representan las variables sobre el plano (o, equivalentemente, la distancia entre una y otra variable). Como se verá luego, en el segundo ejemplo de aplicación, el orden entre dichas variables también es relevante, pues afecta al diagrama de Voronoi resultante y, por tanto, a las bases de los prismas (es decir, el diagrama determina indirectamente el peso de cada variable para cada unidad de análisis). De momento, comentaremos que la falta excesiva de datos consecutivos en una serie solo se compensa dando un mayor peso a otros datos de la misma serie y a los datos más próximos correspondientes a las variables adyacentes. En este caso es cuando conviene tener en cuenta que, puesto que las variables pueden medir aspectos muy distintos, no es recomendable situar las variables en el plano de forma que queden más separadas que la distancia entre los datos consecutivos con los que efectivamente se cuenta en la más irregular de todas las series.

#### 4. Aplicación práctica: datos y resultados

A continuación vamos a ilustrar las dos técnicas anteriores mediante la aplicación a datos de países europeos. El período temporal elegido para el análisis (1995–2010 para el primer caso y 1998–2009 para el segundo, por la disponibilidad de datos fiables) ya fue estudiado, desde el punto de vista macroeconómico y para la zona euro, en Consejo de Redacción RFS (2010). El comienzo del período es un momento interesante por varios motivos. Por una parte, el Instituto Monetario Europeo tuvo que redactar en 1997 un informe evaluando a los 15 países que entonces formaban parte de la Unión Europea, lo que permite conocer la situación de entonces de una forma bastante objetiva y teniendo en cuenta múltiples aspectos. Segundo, porque el Banco Central Europeo se constituyó en 1998, lo que nos proporciona datos homogéneos y sistematizados a partir de esa fecha. Finalmente, porque varios autores, como Moyano (2010), consideran que alrededor de ese momento es cuando culmina un proceso en el que la economía de mercado actúa como fuerza unificadora suficiente para oponerse a las divisiones ideológicas y políticas inherentes a Europa. Por el otro lado, el final de nuestro

análisis lo señala una fase económica y socialmente más convulsa, especialmente en los países de la periferia europea, la situación actual, en la que resulta más complejo valorar qué efectos tienen los rápidos cambios en las variables.

Los datos han sido tomados de Eurostat, concretamente de <http://europa.eu>. Como se comenta en Ariza *et al.* (2010), cuando se intenta investigar en temas sensibles para la economía de la Unión Europea es difícil contar con datos fiables y, en caso de que se consiga, rara vez es una información homogénea y completa. Un ejemplo alusivo a esta realidad es cómo Grecia falseó sus cuentas públicas durante parte del período de análisis. Principalmente es la disponibilidad de datos la que rige la elección de variables de un estudio, pero en nuestro caso también han influido otros factores, como incorporar las tres cuestiones que pensamos que pueden afectar más directamente al ciudadano en nuestro entorno (aparte de las espirituales): la renta, la salud y el empleo.

Evidentemente, la elección de unas variables adecuadas tiene una importancia crucial en el estudio que se desea realizar. Las variables sobre la renta son las más habituales en las investigaciones unidimensionales sobre riqueza y bienestar;<sup>3</sup> las multidimensionales, también en el caso de la pobreza y la desigualdad, casi siempre incorporan la esperanza de vida, pues aporta aspectos varios sobre la salud; finalmente, creemos que el empleo es determinante para diagnosticar el funcionamiento de una nación desarrollada. Nuestra elección, aunque pueda ser discutible, está respaldada por opiniones de numerosos especialistas, como Ariza *et al.* (2010), que destacan la importancia del empleo en un análisis económico riguroso, así como la relevancia de las condiciones laborales de los trabajadores como un indicador del bienestar. En este modelo simplificado, como se ha visto, nos conformamos con agregar una variable sobre el empleo, pero proponemos la inclusión de otras en posteriores estudios. Así, otra posibilidad interesante sería considerar variables sobre educación, que son las que suplen a las de empleo en el reciente informe del PNUD (2010) en el que se reformula el índice de desarrollo humano en base, precisamente, a tres pilares: la renta, la esperanza de vida y la educación.

Según lo anterior, las variables de nuestros ejemplos serían: la esperanza de vida al nacer, el producto interior bruto (PIB) per capita y la tasa de empleo. Su descripción exacta tiene cierta complicación. Del PIB, que es la variable que utilizaremos para explicar la técnica univariante, comentaremos que es una medida

---

<sup>3</sup> En Fernández y Martín (2006) se pueden consultar distintas posibilidades que incluyen desde indicadores de pobreza, como concepto opuesto al de riqueza, hasta funciones de bienestar, por ejemplo.

habitual de la actividad económica de un país. Se define como el valor de todos los bienes y servicios producidos menos el valor de todos los bienes y servicios usados para su producción. Periódicamente Eurostat publica también un "GDP per capita PPS con EU-27=100", pero no nos interesa tanto, porque aunque ese índice sirve para comparar diferentes países, no permite observar la evolución temporal de la variable, al dividir por una cantidad distinta los PIB de cada año. La serie de los PIB de cada país, entre 1995 y 2010, aunque es bastante completa, presenta las siguientes irregularidades:

La serie de datos es desigualmente espaciada, ya que hay disponible una parte trimestral (de 2008 a 2011, incluidos), pero el resto es anual y con algunos datos faltantes que dependen de cada país. Así, en algunos casos, Eurostat estima el valor del PIB y en otros deja un espacio en blanco, según el tipo de problema que se presentó al tratar de obtener la información. En concreto, no están disponibles los siguientes valores: el de Bélgica de 1995, el de Bulgaria de 2010, el de Croacia del primer trimestre de 2011 (y los datos anuales de 2008 a 2010, aunque incluidos, son "provisionales"), el anual de Eslovenia desde 2008 hasta 2010 (incluidos los extremos del intervalo, aunque sí están disponibles los datos trimestrales en dicho período 2008–2011, salvo en el segundo trimestre de 2008), el de Francia del segundo trimestre de 2008, el de Grecia del segundo trimestre de 2008, el de Islandia de 2010 y del segundo trimestre de 2008, el de Macedonia de los años 1995, 1996 y 2010 y los trimestrales en todo el período (2008–2011), el de Malta desde 1995 hasta 1999 (incluidos), el de Rumanía del segundo trimestre de 2008, el de Suecia trimestral (falta el dato en todo el período 2008–2011, salvo para el segundo trimestre de 2008), el de Suiza para el segundo trimestre de 2008 y el de Turquía de 2010 y los datos trimestrales en todo el período (2008–2011). Por si fuera poco, el PIB de Liechtenstein y Montenegro no están disponibles en todo el período (1995–2010, ni los anuales ni los trimestrales), por lo que debemos eliminar ambos países del análisis. Además, algunos valores puntuales se han considerado poco fiables (de acuerdo con los comentarios recogidos en los respectivos informes de Eurostat) y se han eliminado del estudio. Es decir, que finalmente contamos con un conjunto total de 33 países (tras eliminar Liechtenstein y Montenegro), en los que se presentan 14 patrones distintos de distribuciones temporales de los datos; como comentamos antes, ninguna de ellas es totalmente regular, en el significado usual del término, aunque algunas cuenten con información en los 26 instantes temporales considerados.

Siendo justos, debemos avisar de que Eurostat va actualizando y corrigiendo los datos continuamente, por lo que es posible que ya consten algunos de los datos anteriores o alguna forma alternativa de conseguirlos. No obstante, no

estaban disponibles en la fecha de realización del análisis, lo que consideramos un motivo suficiente para utilizarlos en la aplicación de una técnica apropiada para series irregulares. Como se puede comprobar, a pesar de tratarse de una región desarrollada y democrática que presume de fluidez en la transmisión de la información pública, hay suficientes problemas en las series que justifican nuestro tratamiento.

En resumen, el proceso seguido para el primer análisis ha sido el siguiente: selección de la variable de interés (PIB per capita) y del período de análisis (1995–2010); homogeneización de las unidades de medida utilizadas a lo largo de las series; normalización de la variable homogeneizada (dividiendo todos los valores entre el mayor de entre todos los años y países, aunque también se podían haber utilizado otras técnicas de homogeneización más sofisticadas); realización de los cálculos presentados en el apartado 3.1, mediante una hoja de cálculo (Microsoft Office Excel 2003). En cuanto a los resultados obtenidos, pueden consultarse en la Tabla 1; nótese que el indicador puede variar en este caso entre 0 y 15,625, que es la duración del intervalo total considerado. Obviamente, mayores valores del indicador vienen asociados a países más ricos.

En cuanto a la técnica presentada en el apartado 3.2, en esta ocasión hay que seleccionar varias variables que sirvan para valorar la riqueza de las naciones europeas. Por los motivos expuestos con anterioridad, las tres variables elegidas fueron la esperanza de vida al nacer, el PIB per capita y la tasa de empleo. Es fácil comprobar que la primera y última variables consideradas tienen un menor peso en el resultado global del indicador (tal y como hemos definido el indicador, el peso de las variables inicial y final es casi la mitad que el de las centrales); como el PIB es la variable más aceptada de las tres por parte de los investigadores especializados, se le ha asignado a propósito la segunda posición. Esta elección determinó automáticamente un sistema de nodos distinto para cada país, pues los datos faltantes eran diferentes para cada uno.

La definición exacta de la variable “esperanza de vida” se puede consultar en la página web de Eurostat; para nosotros, significa la edad que debería alcanzar en media un ciudadano del país en cuestión que naciera el 1 de enero del año correspondiente. En cuanto a la “tasa de empleo”, se define brevemente como el cociente del número de trabajadores (empleados durante la semana de referencia de la encuesta) de entre 15 y 64 años dividido por el total de la población de dicho grupo de edad. En la variable “Europe 2020 employment” se considera solo a las personas entre 20 y 64 años, pero las estadísticas aún no están incluidas en el “EU Labour Force Survey”.

**TABLA I. Resultados de la evolución temporal del PIB en Europa (1995–2010)**

<b>País</b>	<b>Indicador</b>	<b>País</b>	<b>Indicador</b>
Alemania	4,63949617	Italia	3,86519271
Austria	4,87926117	Letonia	0,91248961
Bélgica	4,6440869	Lituania	0,89858185
Bulgaria	0,44027691	Luxemburgo	10,0282192
Chipre	2,85506106	Macedonia	0,35986416
Croacia	1,18762963	Malta	2,07768288
Dinamarca	6,1029557	Noruega	8,03452661
Eslovaquia	1,05676468	Países Bajos	4,96894181
Eslovenia	2,26800666	Polonia	1,03527544
España	3,0666476	Portugal	2,29322132
Estonia	1,126638	Reino Unido	4,94583022
Finlandia	4,9071025	República Checa	1,3946469
Francia	4,39620368	Rumanía	0,48603
Grecia	2,61915722	Suecia	5,64847993
Hungría	1,10612466	Suiza	6,99900928
Irlanda	5,3079115	Turquía	0,86819374
Islandia	6,05363688		

Elaboración propia.

El período elegido para todo el estudio es el común a las tres variables, 1998–2009, (incluidos los extremos), pero los instantes temporales en los que pueden situarse los nodos (los habrá o no según la existencia de datos para cada unidad de análisis) sí son distintos para cada variable. Reuniendo todos esos instantes, queda la lista: 1998; 1998,5; 1999; 1999,5; 2000; 2000,5; 2001; 2001,5; 2002; 2002,5; 2003; 2003,5; 2004; 2004,5; 2005; 2005,5; 2006; 2006,5; 2007; 2007,5; 2008; 2008,375; 2008,5; 2008,625; 2008,875; 2009 (26 posibilidades, como se apuntó anteriormente). Nótese que se han utilizado los instantes que se han considerado más adecuados, sin importar que el dato deba asignarse al punto medio del intervalo al que corresponde. Así introducimos otra ventaja de la técnica: el dato se puede asignar al instante exacto al que corresponde, sin importar que se genere una serie temporal desigualmente espaciada, pues no se complican los cálculos posteriores. En nuestro ejemplo utilizamos puntos representativos de los períodos solo a efectos didácticos.

No hay datos de la esperanza de vida de Turquía, así que hemos tenido que eliminar el país del estudio que se presenta en este ejemplo final. Aunque dicha serie es generalmente anual (y no cuatrimestral) y totalmente regular en su diseño, si nos fiamos de las estadísticas publicadas, hay algunos datos perdidos (no disponibles en Eurostat ni en ninguna otra fuente). Por el contrario, en la serie "empleo" sí faltan algunos datos y, además, hay algunas irregularidades en el muestreo (de los que incluso advierte Eurostat) que hacen que tengamos que eliminar ciertos datos. *La falta de comparabilidad debida a cambios en las características del muestreo* afecta a los siguientes países y años: Portugal en 1997 y 1998, Reino Unido en 1999 y 2000, Bulgaria en 2000 y 2001, Rumanía en 2001 y 2002, Italia y Austria en 2003 y 2004 y Alemania, España y Suecia en 2004 y 2005. En cuanto a los otros datos faltantes, se registran las siguientes pegas: Bulgaria, Chipre y Malta en 1998 y 1999, Islandia de 1998 a 2002 (incluidos los extremos), Noruega en 1998 y 1999, Croacia de 1998 a 2001 (incluidos) y Macedonia de 1998 a 2005 (incluidos).

**TABLA 2. Resultados de la evaluación de tres variables en Europa (1998–2009)**

<b>País</b>	<b>Riqueza</b>	<b>País</b>	<b>Riqueza</b>
Alemania	19,2694	Islandia	22,2955
Austria	19,7985	Italia	17,5816
Bélgica	18,6248	Letonia	13,7251
Bulgaria	13,0204	Lituania	14,1084
Chipre	17,5076	Luxemburgo	24,4634
Croacia	13,3271	Macedonia	10,2494
Dinamarca	21,5857	Malta	15,4544
Eslovaquia	14,1211	Noruega	23,7069
Eslovenia	16,386	Países Bajos	20,3276
España	17,0529	Polonia	13,8819
Estonia	14,633	Portugal	16,7956
Finlandia	19,7467	Reino Unido	20,219
Francia	18,765	República Checa	15,3231
Grecia	16,3368	Rumanía	13,5402
Hungría	13,9186	Suecia	21,2258
Irlanda	20,0802	Suiza	22,9737

Elaboración propia.

Como decíamos, fueron eliminadas del análisis Liechtenstein, Montenegro y Turquía, por no haber datos de alguna serie completa. Una vez homogeneizadas las unidades de medida y normalizados los valores, como en el ejemplo anterior, se realizaron los cálculos apropiados con el programa de computación simbólica Mathematica 7, incluida la representación del diagrama de Voronoi específico para los datos disponibles de cada país. Los resultados obtenidos esta vez se recogen en la Tabla 2. Hay que tener en cuenta que, debido al área de la región en la que se han representado los nodos y a la normalización realizada, este indicador está acotado inferiormente por 0 y superiormente por 33. Con las limitaciones lógicas, un valor mayor del indicador implica un mayor nivel de riqueza.

Si se comparan los resultados presentados en las Tablas 1 y 2, salta a la vista que son muy similares entre sí. A modo de ejemplo, si se ordenan los países según sus puntuaciones, salvo el caso de Turquía (que desaparece en este segundo análisis) y los casos de Croacia y Lituania, todos los países se mueven como mucho 2 posiciones relativas arriba o abajo en una y otra clasificaciones (Tablas 1 y 2). Por otra parte, también es posible comparar las clasificaciones anteriores con las obtenidas en publicaciones prestigiosas y mediante la utilización de otros indicadores. A nivel mundial, son de gran relevancia las aportadas por PNUD (2010); algunas de ellas están disponibles en su página web y son interactivas, lo que facilita las comparaciones en distintos años. Si se estudian, por ejemplo, las dadas por el indicador "Hybrid-HDI"<sup>4</sup> entre los años 1995 y 2010, se puede comprobar su gran similitud. Los casos que más varían (aparte de Alemania, que no aparece en los últimos informes) son los de Reino Unido y Luxemburgo, que llegan a bajar hasta 7 posiciones en algunos años con respecto a la que le asignamos en nuestro estudio y el de España, que llega a subir hasta 6 posiciones en la clasificación de países europeos. Estas diferencias se deben, fundamentalmente, a que el HDI híbrido considera la media de años de escolarización, que es bastante alta en nuestro país en comparación al resto de países de nuestro entorno.

---

<sup>4</sup> Los informes de PNUD (2010) son mundiales, por lo que hay que separar manualmente los países europeos si se quiere realizar la oportuna comparación con las clasificaciones presentadas en este artículo.

## 5. Conclusiones

En este artículo se ha presentado una técnica sencilla y original para el análisis de series temporales irregulares y se ha aplicado para comparar la riqueza en los países europeos, a través del uso de una o de varias variables. La interpretación específica de los resultados obtenidos, como los que se podrían deducir de la aplicación a otros conjuntos de datos, se deja propuesta para posteriores investigaciones, centradas en los aspectos socioeconómicos; creemos que pueden tener el suficiente interés como para dedicarle una atención científica y un espacio propio. Recordemos opiniones como la de Moyano (2010), quien considera que la Europa del siglo XXI no puede perder de vista sus raíces y, entre ellas, *la economía de mercado y un sistema de bienestar que evite la exclusión y contribuya a reducir las desigualdades sociales y económicas*. Según esto, cualquier herramienta que ayude a medir la riqueza de una nación puede resultar útil para fortalecer la sociedad europea. Creemos que este artículo proporciona el modo de soslayar, con un coste computacional muy reducido, las dificultades más habituales en el tipo de estudio al que nos referimos.

En lo que antecede, también se ha explicado en qué consisten los rudimentos de la interpolación y se han aplicado los tipos más básicos. Como se ha comentado, las interpolaciones de orden superior suelen ser más potentes, pero plantean más requisitos y pueden producir resultados indeseados, pues se le da más importancia a la regularidad matemática de la función real, lo que suele causar más variabilidad y, por ello, un mayor desvío de la evolución lógica de la serie, algo que no es precisamente positivo en la interpretación de modelos de series temporales.

Como se ha podido comprobar, los indicadores propuestos tienen varias ventajas. Entre ellas están su simplicidad, que admiten series de datos irregulares (por lo que se puede prescindir de los datos que el investigador considere poco fiables), que se puede asignar cada dato al instante exacto al que corresponde, que su funcionamiento es más objetivo de lo habitual (aunque la subjetividad en las decisiones del investigador son inherentes a este tipo de estudios) y que es más fácil analizar lo que ocurre que cuando se aplican complejas técnicas econométricas (que, además, en presencia de datos irregulares se conseguirá aplicarlas tras una transformación de las series y eso en el mejor de los casos). En cuanto a sus principales limitaciones, están que no deberían utilizarse en solitario so pena de perder información relevante como, por ejemplo, las tendencias de las series. Esto significa que, si se quiere realizar un análisis riguroso y suficientemente completo, sería conveniente considerar algunos indicadores complementarios y estudiarlos conjuntamente.

A fin de proponer algunas ideas para la investigación futura, elevamos a la consideración del lector la posibilidad de comparar los resultados con los de otros estudios y de utilizar otras variables, tantas como se desee, ya sean regulares o irregulares. En consonancia con las últimas decisiones adoptadas por el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD, 2010), estas variables podrían corresponder específicamente con el ámbito de la educación. Recordamos asimismo que la versatilidad de la técnica propuesta facilita que cada dato pueda referirse a distintos momentos del tiempo en cada unidad de análisis. Además, se sugiere analizar una misma región, cualquiera que sea su naturaleza geográfica o política, realizando sucesivamente diferentes divisiones socio-políticas y considerando todos los resultados de una forma comprensiva y global.

## 6. Referencias bibliográficas

ARIZA MONTES, J. A., MORALES GUTIÉRREZ, A. C. y MORALES FERNÁNDEZ, E. (2010), "Condiciones laborales de los inmigrantes en la Unión Europea: un estudio comparado", *Revista de Fomento Social* n° 258 (abril-junio), pp. 205-233.

AURENHAMMER, F. (1991), "Voronoi diagrams: A survey of a fundamental geometric data structure", *ACM Computing Surveys*, 23, pp. 345-405.

BOX, G. E. P. y JENKINS, G. M. (1976), *Time-Series Analysis: Forecasting and Control*, San Francisco, Holden-Day.

CONSEJO DE REDACCIÓN RFS (2010), "La crisis del euro", *Revista de Fomento Social* n° 260 (octubre-diciembre), pp. 589-617.

DAVEYM, A. y SAVLA, J. (2010), *Statistical Power Analysis with Missing Data*, Nueva York, Psychology Press.

DIRICHLET, G. L. (1850), "Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 40, pp. 209-227.

DOMÍNGUEZ, M., BLANCAS, F. J., GUERRERO, F. y GONZÁLEZ, M. (2011), "Una revisión crítica para la construcción de indicadores sintéticos", *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa* n° 11, pp. 41-70.

DOMÍNGUEZ, J. y MARTÍN, A. M. (2006), "Medición de la pobreza: una revisión de los principales indicadores", *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa* n° 2, pp. 27–66.

MOYANO ESTRADA, E. (2010), "Liberalismo, socialdemocracia y catolicismo social. Aproximación sociológica a las bases ideológicas de la construcción europea", *Revista de Fomento Social* 65, 119–138.

PNUD (2010), *Informe sobre el desarrollo humano 2010: edición del vigésimo aniversario. La verdadera riqueza de las naciones: caminos al desarrollo humano*, Nueva York, Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo.

VAN PRAAG, B. M. S., HAGENAARS, A. J. M. y VAN WEEREN, H. (1982), "Poverty in Europe", *Review of Income and Wealth*, 28, No. 3, pp. 345–359.

VORONOI, G. (1908), "Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 133, pp. 97–178.